

ЭФФЕКТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПЕРИОДА СИГНАЛА В АНАЛОГО-ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ

Вострецов А.Г., Васюков В.Н., Куратов К.А.

Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирск, Россия, e-mail :vostretsov@first.nstu.ru

На практике часто требуется оценивать период сигнала, наблюдаемого на фоне шума. При больших отношениях сигнал/шум используются простые оценки, основанные на измерении временных интервалов между соседними пересечениями процессом заданного уровня.

В аналого-цифровых системах использование тактовых импульсов для измерения периода сигнала счетным методом не представляется возможным, так как их частота обычно оказывается значительно ниже частоты, обеспечивающей заданную точность оценки.

В настоящей работе выполнен синтез и анализ алгоритма оценивания периода сигнала, наблюдаемого на фоне стационарного гауссовского шума в условиях априорной неопределенности, предназначенного для реализации в аналого-цифровых системах и обеспечивающего заданную точность оценки при относительно низкой частоте дискретизации с учетом эффекта дрожания отсчетов и шума квантования.

Пусть наблюдаемый процесс $x(t)$ представляет собой аддитивную смесь периодического сигнала $U_m s(t)$ и дифференцируемого гауссовского шума $h(t)$:

$$x(t) = U_m s(t) + h(t),$$

где U_m – амплитуда сигнала, $s(t)$ – нормированный по амплитуде сигнал, $h(t)$ – дифференцируемый гауссовский шум с дисперсией s^2 . Обозначим отношение сигнал/шум $q = U_m / s$, период сигнала T , скважность сигнала n . Сигнал $s(t)$ пересекает уровень H снизу вверх в моменты времени t_i^+ , а сверху вниз – в моменты времени t_i^- .

Выделим пары соседних отсчетов дискретизированного входного процесса, между которыми процесс $x(t)$ пересекает уровень H . Пусть суммарное число пересечений снизу вверх и сверху вниз в пределах интервала наблюдения DT равно $2n$. Обозначим через $\{x_i^{+-}, x_i^{++}\}$, $\{x_i^{-+}, x_i^{--}\}$, $i = 0, \dots, n-1$ пары, составленные из отсчетов при пересечении процессом $x(t)$ уровня H соответственно снизу вверх и сверху вниз.

Считая шаг дискретизации τ малым, запишем для моментов времени t_i^+ , t_i^- , $i = 0, \dots, n-1$, когда происходит пересечение уровня H соответственно снизу вверх и сверху вниз,

$$t_i^+ = \tau n_i^+ + \frac{H - x_i^{+-}}{x_i^{++} - x_i^{+-}}, \quad i = 0, \dots, n-1; \quad t_i^- = \tau n_i^- + \frac{x_i^{-+} - H}{x_i^{-+} - x_i^{--}}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (1)$$

где n_i^+ – число отсчетов процесса $x(t)$ от начала наблюдения до отсчета x_i^{+-} ; n_i^- – число отсчетов процесса $x(t)$ от начала наблюдения до отсчета x_i^{-+} .

Из величин t_i^+ , t_i^- , задаваемых формулами (1) и, сформируем векторы $\mathbf{t}^+ = \{t_0^+, \dots, t_{n-1}^+\}$ и $\mathbf{t}^- = \{t_0^-, \dots, t_{n-1}^-\}$.

Используя выборочные векторы \mathbf{t}^+ , \mathbf{t}^- и результаты работы [1], получим оценки периода для случая, когда априорно неопределенными являются модули крутизны переднего и заднего фронтов (кроме того, они полагаются равными), временное положение сигнала и отношение сигнал/шум при известной (оценка \hat{T}_1) и неизвестной (оценка \hat{T}_2) скважностях сигнала:

$$\hat{T}_1 = \frac{\sum_{i=0}^n (2in - nn - 1) n_i^+ + \frac{H - x_i^{+-}}{x_i^{++} - x_i^{+-}} + (2in - nn + 1) n_i^+ + \frac{x_i^{-+} - H}{x_i^{-+} - x_i^{--}}}{(n+1)(n^2n^2 + 2nn^2 + 3)}, \quad (2)$$

$$\hat{T}_2 = \frac{\sum_{i=0}^n (i - n/2) \cdot n_i^+ + \frac{H - x_i^{+-}}{x_i^{++} - x_i^{+-}} + n_i^+ + \frac{x_i^{-+} - H}{x_i^{-+} - x_i^{--}}}{n(n+1)(n+2)} \quad (3)$$

При анализе погрешностей оценок будем учитывать, что на них влияют следующие факторы: аддитивный гауссовский шум $h(t)$, присутствующий на входе измерителя вместе с сигналом; случайное смещение моментов взятия отсчетов при дискретизации (джиттер) [2]; шум квантования с шагом a , имеющий дисперсию $a^2/12$.

Наличие этих факторов приводит к тому, что величины x_i^{+-} , x_i^{++} , x_i^{-+} и x_i^{--} , входящие в выражения (2) и (3), содержат случайные составляющие, которые необходимо учитывать при анализе погрешностей оценок.

Принимая, что $s_{x_i^{++}}^2 \gg s_{x_i^{+-}}^2 \gg s_{x_i^{-+}}^2 \gg s_{x_i^{--}}^2 = s_x^2$ для всех i , можно показать, что дисперсии отсчетов x_i^{+-} , x_i^{++} , x_i^{-+} и x_i^{--} с учетом входного шума, влияния джиттера и шума квантования равны $s_x^2 = s_{hj}^2 + s_j^2 \left(\frac{\sigma}{\Phi} + 4p^2 \frac{F_B}{F_H} \int_{\Phi}^{\infty} f^2 N_h(f) df + \frac{a^2}{12} \right)$, где s_j^2 – дисперсия случайных колебаний момента взятия отсчетов (дисперсия джиттера), s_{hj}^2 – дисперсия входного шума, подвергнутого вследствие влияния джиттера частотной фильтрации эквивалентным фильтром с комплексной частотной характеристикой $K(f) = 1 - 2p^2 f^2 s_j^2$ [2].

Можно показать, что оценки сверху дисперсий оценок \hat{T}_1 и \hat{T}_2 равны соответственно

$$\tilde{s}_{\hat{T}_1}^2 = \frac{6n^2}{(n+1)(n^2n^2 + 2nn^2 + 3)} \cdot \frac{s_{hj}^2}{|s|^2} + s_j^2 \left(\frac{\sigma}{\Phi} + \frac{4p^2 F_B}{|s|^2 F_H} \int_{\Phi}^{\infty} f^2 N_h(f) df + \frac{a^2}{12|s|^2} \right), \quad (4)$$

$$\tilde{s}_{\hat{T}_2}^2 = \frac{6}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{s_{hj}^2}{|s|^2} + s_j^2 \left(\frac{\sigma}{\Phi} + \frac{4p^2 F_B}{|s|^2 F_H} \int_{\Phi}^{\infty} f^2 N_h(f) df + \frac{a^2}{12|s|^2} \right). \quad (5)$$

На рис. 1 приведены графики относительных среднеквадратических погрешностей оценок периода синусоидального сигнала $\tilde{d}_1 = \tilde{s}_{\hat{T}_1}/T$ и $\tilde{d}_2 = \tilde{s}_{\hat{T}_2}/T$ (кривые 1 и 2 соответственно), характеризующих точность оценок \hat{T}_1 и \hat{T}_2 , в зависимости от числа пересечений n , полученные на основании формул (4) – (5). При отношении сигнал/шум $q = 100$ графики заметно различаются лишь для небольших n , при $q = 10$ они практически сливаются (кривая 3). На рис. 2 приведен график, показывающий относительное превышение $\tilde{s}_{\hat{T}}/\tilde{s}_{\hat{T}_0}$ (в процентах) среднеквадратического отклонения $\tilde{s}_{\hat{T}}$ оценки \hat{T}_1 или \hat{T}_2 с учетом джиттера над среднеквадратическим отклонением $\tilde{s}_{\hat{T}_0}$ этой величины в отсутствие джиттера в зависимости от относительного среднеквадратического отклонения джиттера s_j/T (эта зависимость для обеих оценок практически одинакова). Видно, что при относительном среднеквадратическом отклонении джиттера порядка 0.0015, типичном для измерительных систем [2], учет этого явления приводит к возрастанию относительной погрешности оценок примерно на 40%. При оценивании периода прямоугольной последовательности увеличение

погрешности на 40% происходит уже при относительном среднеквадратическом отклонении джиттера порядка 0.0007

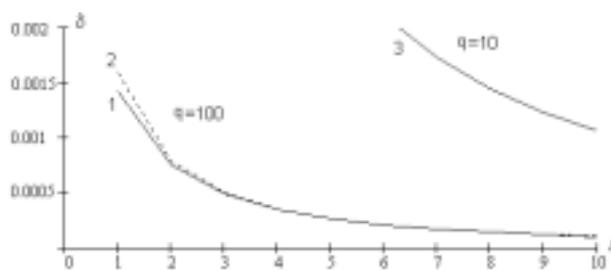


Рис.1

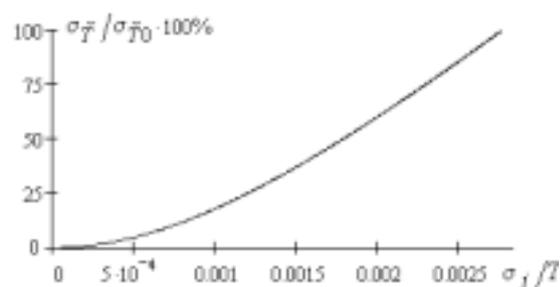


Рис.2

Квантование сигнала с шагом a не оказывает заметного влияния на качество оценок при отношениях $a/U_m \gg 0.01$ и менее. С увеличением шага квантования от $0.01U_m$ до $0.1U_m$ происходит резкое относительное снижение влияния джиттера на точность оценок. При этом относительные погрешности оценок $d_1 = \tilde{s}_{f_1}/T$ и $d_2 = \tilde{s}_{f_2}/T$ возрастают более чем в 2,5 раза из-за преобладающего влияния шума квантования.

Литература

- [1] Вострецов А.Г. // Радиотехника и электроника. – 1997. – т. 42. – № 6. – С. 707–711.
 [2] Вострецов А.Г., Васюков В.Н. // Доклады СО АН ВШ. – 2000. – № 1. – С. 62 – 70.

□

EFFECTIVE SIGNAL PERIOD ESTIMATING IN ANALOG-DIGITAL SYSTEMS

Vostretsov A., Vasyukov V., Kuratov K.

Novosibirsk State Technical University
Novosibirsk, Russia, e-mail:vostretsov@first.nstu.ru

Synthesis and analysis of period estimation algorithm of signal observed on Gauss stationary noise background in a priori non-determined conditions is fulfilled. The algorithm is intended for realization in analog-digital systems and provides prescribed accuracy of estimate on relatively low sample frequency taking into consideration quantization noise and effect of jitter.

Let the process $x(t) = U_m s(t) + h(t)$ is observed. It is the additive product of a periodical signal $U_m s(t)$ and differentiable Gaussian noise $h(t)$, where U_m is the magnitude of the signal, $s(t)$ is the signal normalized to unit magnitude, $h(t)$ is differentiable Gaussian noise with dispersion s^2 . The signal $s(t)$ crosses the threshold level H bottom-up at time moments t_i^+ , and top-down at time moments t_i^- .

Let us consider pairs of neighbor samples of the input process so that the process crosses the threshold level H between the samples of one pair. Let $\{x_i^{+-}, x_i^{++}\}$ and $\{x_i^{-+}, x_i^{--}\}$, $i = 0, \dots, n-1$, to be the pairs consisting of samples obtained when process $x(t)$ crosses threshold level H bottom-up and top-down correspondingly.

We can write equations for the time moments t_i^+ , t_i^- , $i = 0, \dots, n-1$, when crossing the threshold level H bottom-up and top-down correspondingly takes place

$$t_i^+ = \tau n_i^+ + \frac{H - x_i^{+-}}{x_i^{++} - x_i^{+-}}, \quad i = 0, \dots, n-1; \quad t_i^- = \tau n_i^- + \frac{x_i^{-+} - H}{x_i^{-+} - x_i^{--}}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (2)$$

where n_i^+ is quantity of process $x(t)$ samples from beginning of the observing interval up to the sample x_i^{+-} ; n_i^- is quantity of process $x(t)$ samples from beginning of the observing interval up to the sample x_i^{-+} .

Using sample vectors $\mathbf{t}^+ = \{t_0^+, \dots, t_{n-1}^+\}$ and $\mathbf{t}^- = \{t_0^-, \dots, t_{n-1}^-\}$ and results of the work [1], we obtained algorithms of period estimating and its accuracy as follows:

$$\hat{T}_2 = \frac{6\tau \sum_{i=0}^{n-1} (i - n/2) \cdot \left(n_i^+ + \frac{H - x_i^{+-}}{x_i^{++} - x_i^{+-}} + n_i^- + \frac{x_i^{-+} - H}{x_i^{-+} - x_i^{--}} \right)}{n(n+1)(n+2)}; \quad (2)$$

$$\tilde{s}_{\hat{T}_2}^2 = \frac{6}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{s_{hj}^2}{|s|^2} + s_j^2 \frac{\int_{F_H}^{\infty} f^2 N_h(f) df}{\int_{F_H}^{\infty} f^2} + \frac{4\tau^2}{|s|^2} \frac{F_B}{F_H} \frac{\int_{F_H}^{\infty} f^2 N_h(f) df}{\int_{F_H}^{\infty} f^2} + \frac{a^2}{12|s|^2}. \quad (3)$$

where s_j^2 is dispersion of jitter, s_{hj}^2 is dispersion of input noise

References

1. Vostretsov A.G. Effective estimation of signal parameters under conditions of a priori indeterminacy, using complete sufficient statistics [in Russian], *Radiotech. Elektron.*, Vol. 44, No. 4, P. 551 – 556 (1999).