

ОЦЕНКА ПОЛОЖЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОГО ПИКА ПРИ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КОМПЛЕКСНОГО СИГНАЛА

Сергиенко А.Б., Чекунова И.С.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»
197376, Россия, Санкт-Петербург, ул. проф. Попова, д. 5

Введение

Одной из задач, решаемых в процессе обработки сигнала в радиотехнических системах различного назначения, является определение момента прихода сигнала. Оценка данного параметра необходима, в частности, в радиолокационных и радионавигационных системах, а также в системах связи с время-импульсной либо частотно-импульсной модуляцией. Применение сигналов с большой базой (сигналов с расширенным спектром) позволяет получить на выходе согласованного фильтра сигнал в виде узкого пика, что улучшает потенциально достижимую точность оценки момента прихода сигнала. Однако при реализации обработки сигнала в цифровой форме возникают противоречивые требования к выбору частоты дискретизации сигнала. С одной стороны, для уменьшения вычислительных затрат, а, следовательно, энергопотребления и стоимости аппаратуры, необходимо использовать как можно более низкую частоту дискретизации. С другой же стороны, для повышения точности оценки временного положения импульса, возникающего на выходе согласованного фильтра, частота дискретизации должна быть как можно выше. В данном докладе рассматривается компромиссный подход, позволяющий повысить точность оценки временного положения сигнала при низкой частоте дискретизации за счет применения интерполяции. Особенностью предлагаемого алгоритма является учет ограниченности полосы частот обрабатываемого сигнала.

1. Постановка задачи

При определении временного положения детерминированного сигнала со случайной начальной фазой принимаемая аддитивная смесь сигнала с шумом пропускается через фильтр, согласованный с сигналом, имеющим произвольную начальную фазу. К выходу фильтра подключается амплитудный детектор, формирующий огибающую выходного сигнала [1]. Момент достижения максимума этой огибающей и принимается за оценку временного положения входного сигнала. В данной работе предполагается, что система обработки реализована в цифровом виде и на ее вход поступает комплексная огибающая сигнально-шумовой смеси. Фильтр в данном случае должен быть согласован с комплексной огибающей ожидаемого сигнала. Для выходного сигнала согласованного фильтра вычисляются абсолютные значения отсчетов (или их квадраты, чтобы избежать вычисления квадратного корня) и ищется максимум, положение которого может служить оценкой времени прихода входного сигнала. Однако точность такой оценки ограничена периодом дискретизации сигнала — при высоком отношении сигнал/шум и равномерном распределении истинного положения сигнала по отношению к фазе дискретизации дисперсия оценки не может быть меньше, чем $T^2/12$, где T — период дискретизации.

Уменьшить дисперсию оценки можно путем интерполяции сигнала. Широко известен метод параболической интерполяции, когда через максимальный выходной отсчет y_0 и соседние отсчеты слева y_m и справа y_p проводится парабола, после чего аналитически определяется положение ее экстремума. Это дает следующую формулу для поправки Δt (в долях интервала дискретизации T), которую необходимо добавить к положению максимального отсчета:

$$\Delta t = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_p - y_m}{2y_0 - y_p - y_m}. \quad (1)$$

Данная формула проста с точки зрения организации вычислений, но она никак не учитывает тот факт, что сигнал в цифровой системе имеет ограниченную полосу частот, определяемую в соответствии с теоремой Котельникова. Если пик корреляционной функции сигнала, формируемый на выходе согласованного фильтра, является относительно широким (то есть на его ширине укладывается достаточно много отсчетов), это не имеет большого значения, но при узком корреляционном пике, ширина которого составляет 2...4 периода дискретизации, погрешность параболической интерполяции может быть весьма значительной.

В данной работе считается, что корреляционный пик является узким и для выполнения интерполяции сигнала в его окрестностях достаточно использовать три упомянутых выше отсчета y_0 , y_m и y_p . Сигнал, интерполированный в соответствии с теоремой Котельникова, в таком случае может быть записан следующим образом (без потери общности считается, что центральный отсчет имеет нулевой номер, а период дискретизации равен единице):

$$s(t) = y_0 \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} + y_m \frac{\sin(\pi(t+1))}{\pi(t+1)} + y_p \frac{\sin(\pi(t-1))}{\pi(t-1)} = y_0 \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \left(\frac{1}{t} - \frac{y_m/y_0}{t+1} - \frac{y_p/y_0}{t-1} \right). \quad (2)$$

Аналитически максимум функции (2) найти не удастся. Однако искомое положение максимума зависит лишь от двух переменных — нормированных значений боковых отсчетов $y'_m = y_m/y_0$ и $y'_p = y_p/y_0$, что позволяет искать несложные приближенные формулы.

2. Случай вещественного сигнала

Формула для оценки положения максимума в вещественном случае была получена нами ранее, результаты опубликованы в [2], здесь приводятся только основные положения. В случае вещественного сигнала положение максимума интерполированной кривой Δt зависит от двух нормированных переменных y'_m и y'_p , что позволяет выполнить наглядную визуализацию этой зависимости. Оказывается, что линии равного уровня являются практически прямыми и радиально расходятся из точки с координатами (0.8416, 0.8416). Таким образом, естественно представить искомую функцию как функцию угловой координаты φ относительно данной точки:

$$\Delta t = f(\varphi) = f\left(\arctg \frac{y'_m - 0.8416}{y'_p - 0.8416}\right). \quad (3)$$

Анализ этой угловой зависимости показывает, что она является практически линейной:

$$\Delta t = 0.5235\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right). \quad (4)$$

Объединяя (3) и (4), получаем следующее:

$$\Delta t = 0.5235\left(\arctg \frac{y'_m - 0.8416}{y'_p - 0.8416} - \pi/4\right) = 0.5235 \arctg \frac{y'_p - y'_m}{1.6832 - y'_m - y'_p}.$$

Полученная формула содержит операцию вычисления арктангенса, что неудобно для практического ее использования при реализации алгоритмов с помощью цифровых сигнальных процессоров или программируемых логических интегральных схем. Устранить функцию \arctg можно, воспользовавшись приближенным выражением для нее, приведенным в [3]:

$$\arctg(x) \approx \frac{x}{1 + 9x^2/32}.$$

Погрешность данной формулы при $|x| \leq 1$ не превосходит $5 \cdot 10^{-3}$ радиан или 0.3° [3]. Используя данное приближение для арктангенса, получаем

$$\Delta t = \frac{0.5235(y'_p - y'_m)(1.6832 - y'_m - y'_p)}{(1.6832 - y'_m - y'_p)^2 + \frac{9}{32}(y'_p - y'_m)^2} = \frac{0.8812(y'_p - y'_m) - 0.5235(y_p'^2 - y_m'^2)}{2.8332 - 1.6832(y'_p + y'_m) + 1.28125(y_p'^2 + y_m'^2) + 1.4375y'_m y'_p}$$

Таким образом, приближенное выражение для сдвига максимума интерполированной кривой относительно центрального отсчета представляет собой отношение квадратичных форм от нормированных значений отсчетов, соседних с максимумом.

3. Случай комплексного сигнала

По аналогии с вещественным случаем, будем искать приближенную формулу для смещения положения максимума в виде отношения квадратичных форм от нормированных значений отсчетов, соседних с максимумом. Однако в данной ситуации эти нормированные отсчеты являются комплексными, поэтому в формулу должны входить их вещественные и мнимые части по отдельности:

$$y'_m = y'_{mr} + jy'_{mi}, \quad y'_p = y'_{pr} + jy'_{pi}.$$

Таким образом, аппроксимируемая функция является функцией четырех переменных, что не позволяет выполнить ее наглядную визуализацию. Будем искать формулу, по аналогии с вещественным случаем, в виде отношения квадратичных форм от вещественных и мнимых частей нормированных боковых отсчетов:

$$\Delta t = \frac{P(y'_{mr}, y'_{mi}, y'_{pr}, y'_{pi})}{Q(y'_{mr}, y'_{mi}, y'_{pr}, y'_{pi})}, \quad (5)$$

где квадратичные формы P и Q имеют в общем случае следующий вид:

$$\begin{aligned} P, Q(y'_{mr}, y'_{mi}, y'_{pr}, y'_{pi}) = & a_0 + a_1 y'_{mr} + a_2 y'_{mi} + a_3 y'_{pr} + a_4 y'_{pi} + \\ & + a_5 y_{mr}'^2 + a_6 y_{mi}'^2 + a_7 y_{pr}'^2 + a_8 y_{pi}'^2 + a_9 y'_{mr} y'_{mi} + a_{10} y'_{pr} y'_{pi} + \\ & + a_{11} y'_{mr} y'_{pr} + a_{12} y'_{mi} y'_{pi} + a_{13} y'_{mr} y'_{pi} + a_{14} y'_{mi} y'_{pr}. \end{aligned} \quad (6)$$

Однако искомая аппроксимирующая функция должна обладать рядом очевидных свойств:

- Взаимная перестановка боковых отсчетов $(y'_{mr}, y'_{mi}) \leftrightarrow (y'_{pr}, y'_{pi})$ должна приводить только к изменению знака результата. Без потери общности можно потребовать, чтобы при указанной перестановке числитель формулы (5) менял знак, а знаменатель не изменялся.
- Одновременная смена знака у y'_{mi} и y'_{pi} не должна менять результат.
- При $y'_{mr} = y'_{pr}$ и $y'_{mi} = \pm y'_{pi}$ результат должен быть равен нулю из-за симметрии интерполированного сигнала.

Учет этих требований показывает, что значительная часть коэффициентов в (6) должна быть равна нулю и, кроме того, некоторые пары коэффициентов должны быть равны или противоположны друг другу. В итоге получается, что искомая аппроксимирующая формула содержит лишь восемь коэффициентов:

$$\Delta t = \frac{a_1(y'_{mr} - y'_{pr}) + a_2(y'^2_{mr} - y'^2_{pr}) + a_3(y'^2_{mi} - y'^2_{pi})}{1 + a_4(y'_{mr} + y'_{pr}) + a_5(y'^2_{mr} + y'^2_{pr}) + a_6(y'^2_{mi} + y'^2_{pi}) + a_7 y'_{mr} y'_{pr} + a_8 y'_{mi} y'_{pi}}. \quad (7)$$

Для поиска коэффициентов функции (7) был применен следующий метод. Производилось моделирование процесса приема импульсного сигнала с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-импульса) при наличии аддитивного белого гауссового шума. Положение импульса относительно моментов взятия отсчетов было случайным с равномерным распределением сдвига в пределах ± 0.5 отсчета, ширина пика корреляционной функции составляла 2.5 отсчета. К сгенерированному импульсу добавлялся белый шум (использовалось три варианта отношения сигнал/шум: -10 , -7 и -5 дБ), суммарный сигнал пропускался через согласованный фильтр, производился поиск максимального по модулю выходного отсчета, после чего определялись нормированные значения боковых отсчетов. Таким путем была получена выборка из 10 000 пар комплексных переменных y'_{mi} и y'_{pi} для каждого из трех отношений сигнал/шум. Далее для этой выборки был рассчитан интерполированный по Котельникову сигнал с повышением частоты дискретизации в 1000 раз с целью определения положения максимума. Для повышения точности оценки в окрестностях пика интерполированного сигнала выполнялась еще и параболическая интерполяция модуля комплексного сигнала согласно (1). Таким образом были получены желаемые значения искомой функции для данной выборки.

Поиск коэффициентов функции (7) производился методом численной оптимизации. Целевой функцией являлся средний квадрат отклонения рассчитанных положений пика от желаемых значений, определенных описанным выше способом.

После определения всех восьми коэффициентов функции (7) было предпринято исследование значимости отдельных слагаемых ее числителя и знаменателя. Для этого каждый из коэффициентов поочередно задавался равным нулю, а для оставшихся заново решалась оптимизационная задача, при этом исходное решение использовалось в качестве начального приближения. В качестве наименее значимой выбиралась переменная, устранение которой приводило к минимальному приращению целевой функции. Далее процесс устранения переменных продолжался указанным образом — вплоть до ситуации, когда оставалась лишь одна переменная из исходных восьми.

Полученные результаты представлены в табл. 1, где приведены значения коэффициентов и целевой функции для всех размерностей оптимизационной задачи.

Таблица 1. Результаты численной оптимизации

Число коэффициентов	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	Целевая функция
8	-0.3147	0.1431	-0.0486	-1.0464	0.3939	-0.1571	0.3615	0.0920	$7.0858 \cdot 10^{-5}$
7	-0.3139	0.1501	-0.0457	-1.0686	0.4027	-0.1848	0.3900	0	$7.5112 \cdot 10^{-5}$
6	-0.3229	0.0666	-0.0604	-0.7629	0.2714	-0.2809	0	0	$8.6996 \cdot 10^{-5}$
5	-0.3054	0	-0.0633	-0.6919	0.2921	-0.3256	0	0	$1.0702 \cdot 10^{-4}$
4	-0.3069	0	0	-0.6935	0.2973	-0.3140	0	0	$1.5578 \cdot 10^{-4}$
3	-0.3120	0	0	-0.7084	0.2977	0	0	0	$2.9895 \cdot 10^{-4}$
2	-0.4385	0	0	0	0.0756	0	0	0	$2.3237 \cdot 10^{-3}$
1	-0.4188	0	0	0	0	0	0	0	$2.3530 \cdot 10^{-3}$

Зависимость целевой функции от размерности оптимизационной задачи представлена также на рис. 1. Из этого графика видно, что резкое ухудшение показателей происходит, когда число используемых коэффициентов формулы (7) становится меньше трех. По этой причине для практического использования предлагается вариант функции (7) с тремя ненулевыми коэффициентами:

$$\Delta t = \frac{0.312(y'_{pr} - y'_{mr})}{1 - 0.7084(y'_{mr} + y'_{pr}) + 0.2977(y'^2_{mr} + y'^2_{pr})}. \quad (8)$$

4. Результаты моделирования

Для проверки качества оценки положения максимума с помощью полученной формулы было предпринято статистическое моделирование. Аналогично тому, как это делалось при формировании выборки для расчета целевой функции, генерировались комплексные ЛЧМ-импульсы с аддитивным белым гауссовым шумом. Их прием осуществлялся с помощью согласованного фильтра, положение пика выходного сигнала уточнялось с помощью функции (8), а также путем параболической интерполяции модуля выходного сигнала согласно (1). Зависимость полученных среднеквадратических ошибок оценки положения пика от отношения сигнал/шум на выходе согласованного фильтра q показана на рис. 2

(сплошная линия — результат без использования интерполяции, пунктирная — параболическая интерполяция, штрихпунктирная — уточнение положения пика по формуле (8)). Из графиков видно, что по сравнению с параболической интерполяцией формула (8) обеспечивает повышение точности оценки в 1.5...2.5 раза, что соответствует энергетическому выигрышу 3...8 дБ.

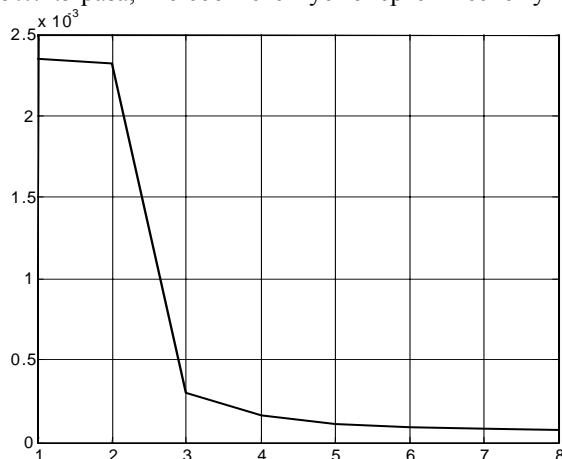


Рис. 1

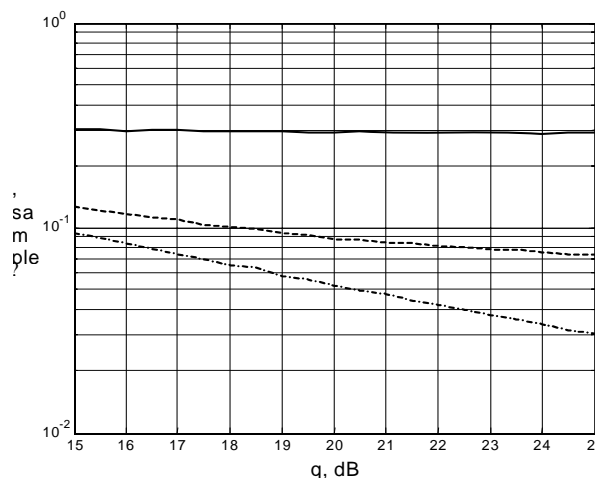


Рис. 2

Заключение

Предложенная формула (8) при невысокой вычислительной сложности позволяет существенно повысить точность оценки времени прихода сигнала. Однако следует отметить, что данная формула предназначена только для интерполяции узких (2...4 отсчета) пиков сигнала, когда предположение о том, что форма пика определяется лишь тремя отсчетами, является обоснованным.

Литература

1. Гришин Ю. П., Ипатов В. П., Казаринов Ю. М. Радиотехнические системы: Учеб для вузов по спец. «Радиотехника». / Под ред. Ю. М. Казаринова. — М.: Высш. шк., 1990. — 496 с.
2. Сергиенко А. Б., Чекунова И. С. Определение положения максимума сигнала при интерполяции по трем точкам. Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». Серия «Радиоэлектроника» (в печати).
3. Lyons R. Another contender in the arctangent race. IEEE Signal Processing Magazine, Vol. 21, No. 1, Jan 2004, pp. 109–110.



TIME OF ARRIVAL ESTIMATION USING 3-POINT INTERPOLATION OF COMPLEX-VALUED SIGNAL

Sergienko A., Chekunova I.

St. Petersburg Electrotechnical University, 5 Prof. Popov Street, St. Petersburg, 197376, Russia

One of common tasks of signal processing is time of arrival estimation. This problem is inherent in radar and navigation systems, and also in communication systems with pulse-position or pulse-frequency modulation. The use of signals with large time-bandwidth product (spread-spectrum signals) allows to obtain the output signal of the matched filter in the form of a narrow peak, that increases potential accuracy of time of arrival estimation. But when implementing the processing system in digital form, we have controversial requirements for the choice of the sampling frequency. On one hand, it should be as low as possible due to computational and power consumption reasons. On the other hand, the higher sampling frequency, the better is time resolution and, therefore, time of arrival estimation accuracy. We propose to solve this controversy through signal interpolation.

A well-known simple method of interpolation is 3-point parabolic interpolation. But this method does not account for band-limited nature of digital signal. The main feature of our approach is taking into account this inherent property of digital signal. We assume that the correlation peak is narrow and its shape is determined by only 3 samples—the peak sample y_0 and two side samples—left y_m and right y_p . In this case the peak position depends on two normalized variables $y'_m = y_m/y_0$ and $y'_p = y_p/y_0$, so we can search for simple approximate formulas.

We derived such formula as a relation of quadratic forms of real and imaginary parts of normalized side samples y'_m and y'_p . The obvious symmetry constraints lead to a function with 8 unknown coefficients:

$$\Delta t = \frac{a_1(y'_{mr} - y'_{pr}) + a_2(y'^2_{mr} - y'^2_{pr}) + a_3(y'^2_{mi} - y'^2_{pi})}{1 + a_4(y'_{mr} + y'_{pr}) + a_5(y'^2_{mr} + y'^2_{pr}) + a_6(y'^2_{mi} + y'^2_{pi}) + a_7 y'_{mr} y'_{pr} + a_8 y'_{mi} y'_{pi}} \quad (9)$$

To find these coefficients we generated random pairs of side samples through simulation of signal reception (chirp impulses with different signal-to-noise ratios were used). Then the optimal set of coefficients was found through numerical optimization (random samples were band-limited interpolated, true peak positions were

calculated and the mean square error of deviations from these true positions was used as a target function). After that, the least significant coefficients were sequentially zeroed, and in such a way 7 simplified functions were obtained. It was revealed that the target function significantly increases when the number of non-zero coefficients became less than 3. So, we suggest the 3-coefficient function for practical use:

$$\Delta t = \frac{0.312(y'_{pr} - y'_{mr})}{1 - 0.7084(y'_{mr} + y'_{pr}) + 0.2977(y'^2_{mr} + y'^2_{pr})}. \quad (10)$$

Simulation results showed that this function gives 1.5...2.5 times better standard deviation of time position estimation than parabolic interpolation of absolute values of complex signal. It corresponds to 3...8 dB SNR gain.

Finally, it should be noted that this formula is intended for interpolating only very narrow peaks with width in the range of 2...4 samples.

References

1. Гришин Ю.П., Ипатов В.П., Казаринов Ю. М. Радиотехнические системы: Учеб для вузов по спец. «Радиотехника». / Под ред. Ю. М. Казаринова. — М.: Высш. шк., 1990. — 496 с.
2. Сергиенко А. Б., Чекунова И. С. Определение положения максимума сигнала при интерполяции по трем точкам. Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». Серия «Радиоэлектроника» (в печати).
3. Lyons R. Another contender in the arctangent race. IEEE Signal Processing Magazine, Vol. 21, No. 1, Jan 2004, pp. 109–110.

